

Analisis Kestabilan Model Sitr pada Penyebaran Penyakit Hepatitis A dengan Vaksinasi

Amelia Tri Rahma Sidik^{1*}, Lia Nanda Sari², Apon Ismail³

^{1,2,3}Jurusan Matematika, Universitas Negeri Gorontalo, Bone Bolango 96119, Indonesia

Info Artikel

*Penulis Korespondensi.
Email:
ameliasidik2002@gmail.com

Submit: 25 Januari 2022
Direvisi: 1 Februari 2022
Disetujui: 5 Februari 2022

Copyright ©2022 by Author(s).

Diterbitkan oleh:
Scimadly Publishing

Under the licence CC BY-SA 4.0

Abstrak

Dalam Artikel ini, dibahas tentang Model Sitr terhadap penyebaran penyakit Hepatitis A dengan Vaksinasi. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kestabilan model penyebaran penyakit hepatitis A di sekitar titik kesetimbangan, dan menginterpretasi model yang telah dibentuk dengan melakukan simulasi numerik serta mengetahui pengaruh vaksinasi dan perawatan terhadap populasi manusia yang terinfeksi hepatitis A. Setelah dianalisis didapatkan dua jenis titik tetap yakni titik tetap bebas penyakit yang dinyatakan dengan (T_1) bersifat stabil dan titik tetap endemik yang dinyatakan dengan (T_2) bersifat stabil. Berdasarkan simulasi numerik, diperoleh Kondisi pada populasi di $R_0 < 1$, dengan $R_0 = 0.28$, kondisi ini menunjukkan dinamika populasi dari masing-masing kelas (S, I, T, R) stabil di titik tetap yaitu $T_1(S, I, T, R)$ sebesar $(0.2, 0, 0, 0.8)$ dari total jumlah populasi atau berarti dalam Kondisi pada populasi di $R_0 < 1$ terdapat kenaikan dan penurunan disetiap kelas dan kemudian seiring berjalannya waktu pada titik t tertentu menjadi stabil dimana terdapat sekitar 20 orang individu yang rentan, tidak ada orang yang terinfeksi dan melakukan perawatan serta sekitar 80 orang yang sembuh dari penyakit hepatitis A dari total jumlah populasi yang ada. Sedangkan untuk kondisi di $R_0 > 1$ dengan bilangan reproduksi dasar $R_0 = 1.41$, menunjukkan dinamika populasi dari masing-masing kelas (S, I, T, R) yang stabil di titik tetap $T_2(0.12, 0.01, 0.002, 0.86)$ dari total jumlah populasi pada waktu t tertentu.

Kata Kunci: Model Sitr; Kestabilan Titik Tetap; Hepatitis; Vaksinasi

Abstract

In this article, the Sitr Model for the spread of Hepatitis A by Vaccination is discussed. This study aims to analyze the stability of the model for the spread of hepatitis A disease around the points, and interpret the model that has been formed by performing numerical simulations and to determine the effect of vaccination and treatment on the human population infected with hepatitis A. indicated by (T_1) is stable and the endemic fixed point indicated by (T_2) is stable. Based on the simulation obtained from each class (S, I, T, R) for $R_0 < 1$, $R_0 = 0.28$, it shows that the population dynamics is $(0.13, 0, 0, 0.87)$ of the total population. Meanwhile, for $R_0 > 1$ with a basic reproduction number $R_0 = 1.41$, it shows the population dynamics of each class (S, I, T, R) that is $(0.12, 0.0056, 0.0053, 0.85)$ of the total population.

Keywords: Sitr models; Fixed Point Stability; Hepatitis; Vaccination

1. Pendahuluan

Hepatitis masih menjadi salah satu masalah Kesehatan di Indonesia. Hepatitis A adalah peradangan hati yang disebabkan oleh virus Hepatitis A (HAV). Virus ini akan dengan cepat menyerang orang – orang yang tidak menjaga kebersihan diri dan lingkungan sekitarnya. karena Virus ini terutama menyebar ketika orang yang tidak terinfeksi menelan makanan atau air yang terkontaminasi dengan kotoran orang yang terinfeksi virus [1] [2]. Di Indonesia prevalensi penyakit hepatitis tergolong cukup tinggi. Pada tahun 2016, 7134 orang meninggal karena hepatitis A diseluruh dunia (menyumbang 0.5% dari kematian akibat virus hepatitis) [3]. Hepatitis merupakan masalah

kesehatan yang cukup serius baik di negara berkembang maupun negara maju. Berdasarkan data, di negara berkembang dengan kondisi sanitasi dan praktik higienis yang buruk, hampir 90% telah terinfeksi virus Hepatitis A sebelum berumur 10 Tahun [3].

Peran matematika dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam ilmu-ilmu yang lain disajikan dalam pemodelan matematika. Representasi matematika yang dihasilkan dari pemodelan matematika dikenal sebagai model matematika. Model matematika banyak digunakan dalam disiplin ilmu dan bidang yang berbeda [4]. Dengan menggunakan model matematika dapat membantu kita dalam memahami suatu permasalahan, mendapatkan cara atau metode yang baru untuk penemuan berikutnya. Dan salah satu permasalahan yang bisa menggunakan model matematika adalah mengenai penyakit Hepatitis A.

Beberapa penelitian terkait dengan pemodelan penyebaran penyakit hepatitis sudah banyak dilakukan sebelumnya. Salah satunya untuk penyebaran virus hepatitis A (HAV). Dalam Penelitian [4] membahas tentang model penyebaran penyakit hepatitis A dengan memperhatikan pemberian vaksinasi dan sanitasi yang dilakukan. Model yang digunakan merupakan model SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*). Adapun Penelitian lainnya yaitu penelitian dengan menggunakan Model SIR (*Susceptible – Infected – Recovery*) yang mereka khususkan untuk memodelkan penyebaran penyakit hepatitis A di kabupaten Jember [5]. Selain itu terdapat Penelitian yang membahas tentang kestabilan model matematika untuk penularan virus hepatitis B [6]. Pada penelitian tersebut kestabilan model dipengaruhi oleh Vaksinasi dan pengobatan dengan adanya migrasi. Adapun penelitian selanjutnya yaitu penelitian [7] membahas tentang penyebaran penyakit hepatitis B dengan pengobatan yang dimodelkan menggunakan model SEIR (*Susceptible, Eksposed, Infected, dan Recovery*).

Dalam penelitian ini memperkenalkan model matematika yang baru pada kasus penyebaran penyakit Hepatitis A dengan mempertimbangkan faktor yang tidak digunakan sebelumnya. Faktor tersebut ialah Faktor *Treatment* atau Perawatan yang ditujukan kepada populasi *infected*. Pemulihan dari gejala setelah infeksi HAV mungkin lambat dan bisa memakan waktu beberapa minggu atau bulan [3]. Maka dari itu faktor *Treatment* penting dilakukan sehingga mampu mempercepat proses penyembuhan dari seseorang yang terinfeksi virus Hepatitis A (HAV). Penelitian ini memodelkan penyebaran penyakit hepatitis A, menganalisis kestabilan model penyebaran penyakit hepatitis A di sekitar titik kesetimbangan, dan menginterpretasi model yang telah dibentuk dengan melakukan simulasi numerik serta mengetahui pengaruh vaksinasi dan perawatan terhadap populasi manusia yang terinfeksi hepatitis A. Model yang digunakan merupakan model SITR (*Susceptible-Infected-Treatment-Recovery*). Pembuatan model ini perlu dilakukan analisis guna mengurangi peluang penyebaran populasi yang terinfeksi HAV.

2. Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah diawali dari studi pustaka tentang model SITR yang menjadi model dasar dalam model yang dibuat. Selanjutnya, Metodologi penelitian yang dilakukan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Membuat asumsi dan mengontruksikan dengan model matematika pada penelitian sebelumnya
2. Membuat model epidemik SITR sesuai studi kasus yang diambil dengan mengembangkan model yang sudah ada pada penelitian sebelumnya.
3. Mencari solusi dari model yang dikembangkan beserta analisis kestabilan
4. Melakukan simulasi numerik

Metodologi penelitian diatas yang terdiri dari empat langkah dimana, langkah pertama mengenai pembuatan asumsi yang akan dijadikan sebagai landasan untuk model yang akan dibuat maupun dikembangkan dan menyesuaikan dengan model pada penelitian sebelumnya. Langkah kedua, membuat model sesuai dengan studi kasus yang diambil dengan mengembangkannya dari model penelitian sebelumnya. Selanjutnya pada langkah ketiga mencari solusi dari model yang telah dikembangkan beserta analisisnya. Begitupun pada langkah keempat dimana melakukan simulasi numerik untuk melihat dinamika populasi yang terjadi.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Model Penelitian

Dalam penelitian ini, dibahas model matematika pada penyebaran penyakit hepatitis A dengan vaksinasi. Populasi dibagi menjadi empat kelompok yaitu *Susceptible* (S) adalah kelompok individu yang rentan terinfeksi hepatitis A, *Infected* (I) adalah kelompok individu yang terinfeksi hepatitis A, *Treatment* (T) adalah kelompok individu terpapar yang melakukan perawatan dan kelompok *Recovery* (R) adalah kelompok individu yang telah sembuh dan kebal dari penyakit hepatitis A.

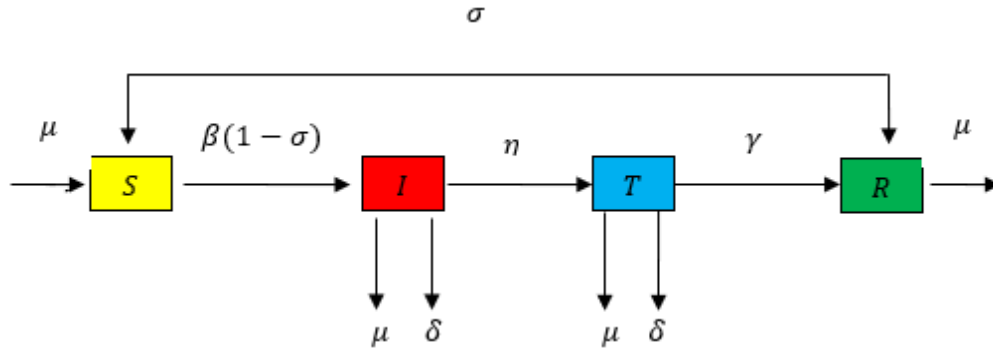
Adapun asumsi-asumsi yang digunakan untuk membuat model SITR

1. Jumlah populasi konstan.
2. Laju kelahiran sama dengan laju kematian.
3. Perubahan individu *Susceptible*, *Infected*, dan *Treatment* proposional terhadap jumlah populasi.
4. Adanya pemberian vaksinasi hanya pada individu yang baru lahir atau masih berusia anak-anak.
5. Populasi kelas individu *Susceptible* rentan terpapar penyakit Hepatitis A.
6. Penularan penyakit Hepatitis A terjadi karena adanya interaksi antara individu yang rentan dengan individu yang terinfeksi, ataupun adanya kontaminasi antara virus Hepatitis A dengan individu yang rentan.
7. Kematian yang terjadi pada masing-masing kelas *Susceptible* dan *Recovery* hanya kematian alami, sedangkan kematian kelas *Infected* dan *Treatment* terjadi karena kematian alami dan akibat terinfeksi Virus Hepatitis A.
8. Individu kelas *Infected* yang dinyatakan terinfeksi akan mendapat *Treatment*.
9. Pasien akan sembuh setelah mendapatkan *Treatment*
10. Hanya ada satu penyakit yang menyebar dalam populasi.
11. Setiap individu yang telah sembuh, tidak terjangkit lagi.

Tabel 1. Keterangan variabel dan parameter

No.	Parameter	Keterangan
1.	β	Tingkat penularan dari <i>infected</i> terhadap <i>susceptible</i>
2.	μ	Laju kelahiran atau kematian secara alami atau yang tidak disebabkan oleh penyakit hepatitis A
3.	δ	Tingkat kematian karena penyakit hepatitis A
4.	γ	Tingkat kesembuhan individu yang terinfeksi setelah melakukan <i>treatment</i>
5.	σ	Tingkat efektifitas vaksinasi
6.	η	Proporsi individu terinfeksi yang memperoleh <i>treatment</i>
7.	S	Jumlah individu yang rentan
8.	I	Individu yang terinfeksi Hepatitis A
9.	R	Individu yang telah sembuh dan akan kebal terhadap penyakit Hepatitis A
10.	P	Individu terinfeksi yang melakukan Perawatan
11.	N	Jumlah populasi manusia,

Berdasarkan dari asumsi-asumsi, maka diperoleh model matematika penyebaran penyakit hepatitis A seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram model matematika SITR pada penyebaran penyakit hepatitis A dengan vaksinasi

Berdasarkan **Gambar 1.** diperoleh Sistem Persamaan Diferensial untuk masing-masing kompartemen sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \mu - (1 - \sigma)(\beta)S \frac{I}{N} - \sigma S - \mu S \\
 \frac{dI}{dt} &= (1 - \sigma)(\beta)S \frac{I}{N} - \eta I - \delta I - \mu I \\
 \frac{dT}{dt} &= \eta I - \gamma T - \delta T - \mu T \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma T + \sigma S - \mu R
 \end{aligned} \tag{1}$$

Menyederhanakan persamaan untuk memudahkan menganalisis model:

$$s = \frac{S}{N} \quad i = \frac{I}{N} \quad p = \frac{T}{N} \quad r = \frac{R}{N}$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \frac{ds}{dt} &= \mu - (1 - \sigma)(\beta)si - \sigma s - \mu s \\
 \frac{di}{dt} &= (1 - \sigma)(\beta)si - \eta i - \delta i - \mu i \\
 \frac{dp}{dt} &= \eta i - \gamma p - \delta p - \mu p \\
 \frac{dr}{dt} &= \gamma p + \sigma s - \mu r
 \end{aligned} \tag{2}$$

3.2 Penentuan Titik Tetap

Dari hasil analisis sistem persamaan didapat dua jenis titik tetap yaitu titik tetap bebas penyakit dan titik tetap dengan penyakit(endemik). Untuk menentukan titik tetap model tetapkan persamaan menjadi konstan terhadap waktu atau $\frac{ds}{dt} = 0, \frac{di}{dt} = 0, \frac{dp}{dt} = 0$, dan $\frac{dr}{dt} = 0$.

- Titik tetap bebas penyakit yang dinotasikan dengan T_1 yaitu:

$$T_1(s, i, p, r) = \left(s = \frac{\mu}{\sigma + \mu}, 0, 0, r = \frac{\sigma}{\sigma + \mu} \right) \quad (3)$$

Titik tetap bebas penyakit diperoleh ketika banyaknya proporsi individu pada kelas terinfeksi dan kelas perawatan sama itu sama dengan nol.

- Titik Tetap dengan penyakit (Endemik) :

$$T_2(s, i, p, r) \quad (4)$$

Dengan memisalkan:

$$\begin{aligned} x &= \eta + \delta + \mu \\ y &= (-1 + \sigma)(\beta) \\ z &= \gamma + \delta + \mu \end{aligned}$$

maka, diperoleh:

$$\begin{aligned} s &= \frac{x}{(\beta - \beta\sigma)} \\ i &= \frac{\mu}{x} + \frac{\mu + \sigma}{y} \\ p &= \frac{\eta \left(\frac{\mu}{x} + \frac{\mu + \sigma}{y} \right)}{z} \\ r &= \frac{\frac{\gamma\eta}{x} + \frac{\gamma\eta\mu - (\delta + \mu)(\gamma + x)\sigma}{\mu y}}{z} \end{aligned}$$

Titik tetap endemik adalah kondisi dimana di dalam populasi terdapat penyakit.

3.3 Bilangan Reproduksi

Bilangan Reproduksi dasar ditentukan dengan menggunakan The Next Generation Matrix K [13,14] yang didefinisikan $K = FV^{-1}$

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= (1 - \sigma)(\beta)si - \eta i - \delta i - \mu i \\ \frac{dp}{dt} &= \eta i - \gamma p - \delta p - \mu p \end{aligned} \quad (5)$$

Berdasarkan sistem persamaan (5), diperoleh matriks F yang merupakan laju perubahan yang mengakibatkan bertambahnya populasi penderita, dan V merupakan laju yang mengakibatkan berkurangnya populasi penderita.

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} (1 - \sigma)(\beta)si \\ 0 \end{bmatrix} \\ V &= \begin{bmatrix} i(\eta + \delta + \mu) \\ -\eta i + p(\gamma + \delta + \mu) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

Matriks Jacobian dari matriks F dan V di atas dinyatakan dengan $F = J(F)$ dan $V = J(V)$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
J(F) &= \begin{bmatrix} (1-\sigma)(\beta)s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
J(V) &= \begin{bmatrix} \eta + \delta + \mu & 0 \\ -\eta & \gamma + \delta + \mu \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7}$$

Menggunakan titik tetap bebas penyakit pada persamaan (3) diperoleh:

$$\begin{aligned}
F &= \begin{bmatrix} \frac{(1-\sigma)(\beta)(\mu)}{\sigma+\mu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
V &= \begin{bmatrix} \eta + \delta + \mu & 0 \\ -\eta & \gamma + \delta + \mu \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{8}$$

Dari persamaan – persamaan tersebut dapat diperoleh matriks *next generation* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
K = FV^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{(1-\sigma)(\beta)(\mu)}{\sigma+\mu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta + \delta + \mu} & 0 \\ \frac{\eta}{(\eta + \delta + \mu)(\gamma + \delta + \mu)} & \frac{1}{\gamma + \delta + \mu} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{(1-\sigma)(\beta)(\mu)}{(\sigma+\mu)(\eta+\delta+\mu)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, ditentukan nilai eigen K sebagai berikut:

$$|K - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{(1-\sigma)(\beta)(\mu)}{(\sigma+\mu)(\eta+\delta+\mu)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{(1-\sigma)(\beta)(\mu)}{(\sigma+\mu)(\eta+\delta+\mu)} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{(1-\sigma)(\beta)(\mu)}{(\sigma+\mu)(\eta+\delta+\mu)} - \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Misal $k = \frac{(1-\sigma)(\beta)(\mu)}{(\sigma+\mu)(\eta+\delta+\mu)}$, Sehingga;

$$|K - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} k - \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$(k_1 - \lambda)(-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = k \vee \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{(1-\sigma)(\beta)(\mu)}{(\sigma+\mu)(\eta+\delta+\mu)} \vee \lambda_2 = 0$$

Karena R_0 nilai eigen dominan atau nilai eigen positif terbesar, maka $R_0 = k$

$$R_0 = \frac{(1 - \sigma)(\beta)(\mu)}{(\sigma + \mu)(\eta + \delta + \mu)} \quad (9)$$

3.4 Kestabilan Titik Tetap

Analisis kestabilan titik tetap dapat ditentukan dengan cara menentukan nilai eigen dari matriks jacobian sistem. Matriks jacobian dari persamaan (4.1) adalah

$$J = \begin{bmatrix} -(1 - \sigma)\beta i - \mu - \sigma & -(1 - \sigma)\beta s & 0 & 0 \\ 0 & -\delta - \eta - \mu + (1 - \sigma)\beta s & 0 & 0 \\ 0 & \eta & -\gamma - \delta - \mu & 0 \\ \sigma & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Penentuan kestabilan di sekitar titik tetap tanpa penyakit (T_1), terlebih dahulu dilakukan pelinearan terhadap persamaan (4.1), kemudian diperoleh matriks Jacobi:

$$J(T_1) = \begin{bmatrix} -\mu - \sigma & -\frac{\beta\mu(1 - \sigma)}{\mu + \sigma} & 0 & 0 \\ 0 & -\delta - \eta - \mu + \frac{\beta\mu(1 - \sigma)}{\mu + \sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \eta & -\gamma - \delta - \mu & 0 \\ \sigma & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Selanjutnya nilai eigen diperoleh berdasarkan matriks jacobian

$$\frac{(\lambda + \mu)(\gamma + \delta + \lambda + \mu)(\lambda + \mu + \sigma)(\beta\mu(-1 + \sigma) + (\delta + \eta + \lambda + \mu)(\mu + \sigma))}{\mu + \sigma}$$

Berdasarkan persamaan di atas diperoleh :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu \\ \lambda_2 &= -(\gamma + \delta + \mu) \\ \lambda_3 &= -(\mu + \sigma) \end{aligned}$$

dan persamaan karakteristik

$$a_0\lambda + a_1 = 0$$

Maka Koefisien dari persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 > 0 \\ a_1 &= (1 - R_0)(\delta + \eta + \mu) > 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, persamaan karakteristik, pada titik tetap T_1 stabil jika memenuhi syarat-syarat kestabilan berikut ini

$$a_1 > 0$$

Dengan kondisi dimana $R_0 < 1$ maka $a_1 > 0$ dan nilai-nilai parameternya bernilai positif, sehingga diperoleh $a_1 > 0$. Kondisi untuk $R_0 < 1$ terpenuhi. Kesimpulan yang didapatkan yaitu karena nilai $\lambda < 0$ dan berdasarkan kriteria Routh Hurwitz telah ditunjukkan terpenuhi, maka titik tetap tanpa penyakit (T_1) stabil asimtotik.

Penentuan kestabilan titik tetap endemik (T_2) digunakan pelinearan pada persamaan (4.1) di sekitar titik (T_2), diperoleh matriks Jacobi

$$J(T_2) = \begin{bmatrix} -\mu - \sigma - \beta(1 - \sigma)\left(\frac{\mu}{\delta + \eta + \mu} + \frac{\mu + \sigma}{\beta(-1 + \sigma)}\right) & -\frac{\beta(\delta + \eta + \mu)(1 - \sigma)}{\beta - \beta\sigma} & 0 & 0 \\ \beta(1 - \sigma)\left(\frac{\mu}{\delta + \eta + \mu} + \frac{\mu + \sigma}{\beta(-1 + \sigma)}\right) & -\delta - \eta - \mu + \frac{\beta(\delta + \eta + \mu)(1 - \sigma)}{\beta - \beta\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \eta & -\gamma - \delta - \mu & 0 \\ \sigma & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Selanjutnya nilai eigen diperoleh berdasarkan matriks jacobian:

$$\frac{(\beta + \lambda - \mu)\mu(\lambda + \mu) - \mu(\mu + \beta(\lambda + \mu))\sigma - \delta^2(\mu + \sigma) - \eta^2(\mu + \sigma) + \eta(\lambda^2 + \mu(\beta - 2\mu - (2 + \beta)\sigma)) + \delta(\lambda^2 - 2(\eta + \mu)(\mu + \sigma) + \beta(\mu - \mu\sigma))}{\delta + \eta + \mu}$$

Berdasarkan persamaan di atas diperoleh Nilai eigen matriks J_{T_2} merupakan akar-akar persamaan karakteristik

$$b_0\lambda^2 + b_1\lambda^1 + b_2 = 0$$

dengan

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = (\mu + \sigma)R_0 > 0$$

$$b_2 = (R_0 - 1)(\delta + \eta + \mu)(\mu + \sigma) > 0$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, persamaan karakteristik (4.7) pada titik tetap T_2 stabil jika dan hanya jika memenuhi syarat-syarat kestabilan berikut:

$$b_1 > 0 \text{ dan } b_2 > 0$$

Dengan kondisi dimana $R_0 > 1$ dan nilai-nilai parameter bernilai positif, Sehingga kriteria Routh-Hurwitz telah ditunjukkan terpenuhi, maka titik tetap dengan penyakit (endemik) T_2 stabil asimtotik.

3.5 Simulasi Numerik

Simulasi dilakukan dengan menggunakan nilai parameter yang terdapat pada Tabel 2. Untuk melihat dinamika populasi berdasarkan nilai-nilai parameter dapat ditentukan dengan bantuan software Wolfram Mathematica® 11.3 dengan $N = 100$ dan nilai awal $s(0) = 0.8, i(0) = 0.2, p(0) = 0$, dan $r(0) = 0$.

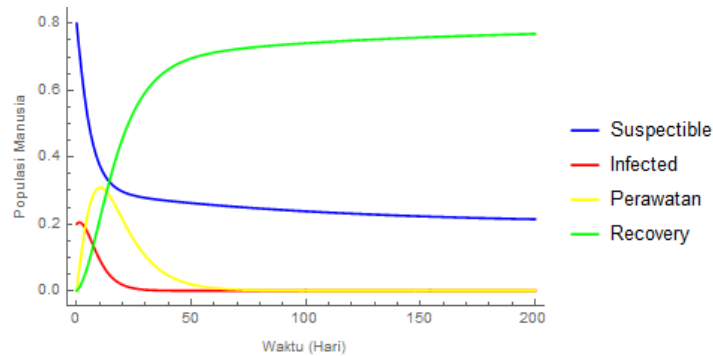
Tabel 2. Nilai-nilai parameter

Parameter	Keterangan	Nilai Parameter	
		T_1	T_2
μ	Laju kelahiran dan kematian secara alami atau yang tidak disebabkan oleh penyakit hepatitis A	0.002	0.002
δ	Tingkat kematian karena penyakit hepatitis A	0.0025	0.003
σ	Tingkat efektifitas vaksinasi	0.008	0.01
β	Tingkat penularan dari <i>infected</i> terhadap <i>susceptible</i>	0.4286	0.9
γ	Tingkat kesembuhan individu yang terinfeksi setelah melakukan <i>treatment</i>	0.0825	0.37
η	Proporsi individu terinfeksi yang memperoleh <i>treatment</i>	0.3	0.1

Simulasi dinamika populasi pada kelas *Infected* dan *Treatment* yang telah dianalisis adalah untuk kondisi $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$. Dalam hal ini, R_0 merupakan bilangan reproduksi dasar.

- **Dinamika Proporsi Populasi Kondisi $R_0 < 1$**

Berdasarkan nilai-nilai dari Tabel 1, maka diperoleh gambar dinamika populasi dengan nilai $R_0 = 0.279259$

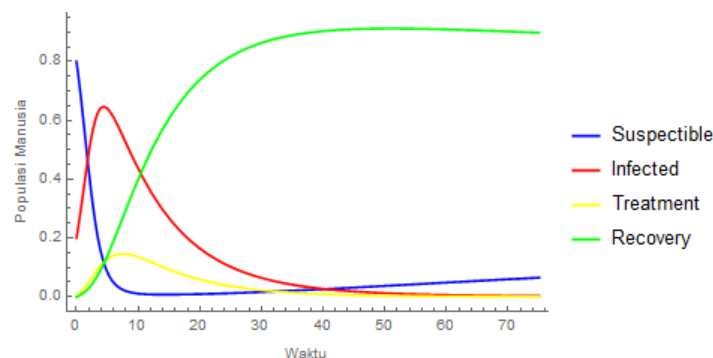


Gambar 1. Dinamika proporsi populasi kondisi $R_0 < 1$

Gambar 1 menunjukkan dinamika proporsi populasi manusia saat terjadinya infeksi. Proporsi pada kelas *Susceptible* (S) dengan nilai awal 0.8, mengalami penurunan mulai dari hari pertama sampai hari-hari berikutnya sampai pada saat memasuki $t = 200$ menjadi stabil di titik $S = 0.2$, atau jumlah populasi kelas *Susceptible* sebesar 20% dari total jumlah populasi yang berarti ada 20 orang dalam populasi yang rentan terhadap penyakit Hepatitis A. Pada kelas *infected* menunjukkan jumlah individu yang terinfeksi yang awalnya 0.2 hingga hari-hari berikutnya menurun sampai pada saat $t = 30$ grafik menunjukkan kestabilan di titik $i = 0$ yang artinya tidak ada individu yang terinfeksi. Kemudian proporsi pada kelas *treatment* awalnya mengalami peningkatan kemudian menurun dan Kembali stabil ke titik $p = 0$ yang berarti tidak ada individu yang memerlukan perawatan. Sedangkan proporsi kelas *recovered* menunjukkan jumlah individu yang kebal meningkat hingga stabil di titik $r = 0.8$ yang berarti individu yang rentan meningkat 80% seiring dengan menurunnya proporsi individu yang rentan atau *Susceptible* yang berarti jumlah orang yang sembuh dalam populasi adalah 80 orang. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa pada saat $R_0 < 1$, $T_1(S, I, T, R)$ stabil ke titik tetap tanpa penyakit $T_1(0.2, 0, 0, 0.8)$.

- **Dinamika Proporsi Populasi Kondisi $R_0 > 1$**

Berdasarkan nilai-nilai parameter dari Tabel 1 diperoleh gambar dinamika populasi dengan nilai $R_0 = 1.41429$.



Gambar 2. Dinamika proporsi populasi kondisi $R_0 > 1$

Gambar 2 menunjukkan dinamika proporsi populasi manusia saat terjadinya infeksi ($R_0 > 1$). Proporsi pada kelas *susceptible* menunjukkan jumlah individu yang rentan dari nilai awal 0.8 menurun sampai saat $t = 70$ menjadi stabil di titik $s = 0.12$, atau setara dengan 12% dari total jumlah populasi yang berarti terdapat sekitar 12 orang dalam populasi yang rentan terhadap penyakit. Kemudian kelas *infected* (I) menunjukkan jumlah individu yang terinfeksi dengan nilai awal 0.2 mengalami kenaikan dan kemudian menurun hingga stabil di titik $i = 0.01$ atau 1% yang berarti pada saat $t = 60$ jumlah orang yang terinfeksi dalam populasi sekitar 1 orang. Kemudian proporsi pada kelas *treatment* menunjukkan jumlah individu yang melakukan perawatan dari titik awal 0 terjadi kenaikan lalu turun dan stabil di titik $p = 0.002$ (0.2%) Sedangkan proporsi kelas *recovered* menunjukkan bahwa jumlah individu mengalami kenaikan dari titik 0 hingga seiring berjalannya pada $t = 40$ menjadi stabil di titik $r = 0.86$ yang berarti individu yang sembuh meningkat 86% dari total jumlah populasi atau terdapat sekitar 86 orang yang sembuh dari penyakit hepatitis A. Dengan demikian bisa dikatakan bahwa $T_2(S, I, T, R)$ stabil ke titik tetap endemik $T_2(0.12, 0.01, 0.002, 0.86)$.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang dilakukan melalui diagram kompartemen dapat disimpulkan bahwa model matematika SITS pada penyebaran penyakit hepatitis A dengan vaksinasi memperoleh dua titik tetap yang bersifat stabil yaitu titik tetap bebas penyakit (T_1) dan titik tetap endemik (T_2). Kemudian dengan menggunakan nilai-nilai parameter yang ada pada simulasi numerik, diperoleh bilangan reproduksi dasar (R_0). Kondisi pada populasi di $R_0 < 1$, diperoleh $R_0 = 0.279259$, kondisi ini menunjukkan dinamika populasi dari masing-masing kelas (S, I, T, R) stabil di titik tetap yaitu $T_1(S, I, T, R)$ sebesar $(0.2, 0, 0, 0.8)$ dari total jumlah populasi atau berarti dalam Kondisi pada populasi di $R_0 < 1$ terdapat kenaikan dan penurunan disetiap kelas dan kemudian seiring berjalannya waktu pada titik t tertentu menjadi stabil dimana terdapat sekitar 20 orang individu yang rentan, tidak ada orang yang terinfeksi dan melakukan perawatan serta sekitar 80 orang yang sembuh dari penyakit hepatitis A dari total jumlah populasi yang ada. Sedangkan untuk kondisi di $R_0 > 1$ dengan bilangan reproduksi dasar $R_0 = 1.41429$, menunjukkan dinamika populasi dari masing-masing kelas (S, I, T, R) yang stabil di titik tetap $T_2(0.12, 0.01, 0.002, 0.86)$ dari total jumlah populasi pada waktu t tertentu.

Referensi

- [1] S. Nur, "Tantangan Dalam Penanggulangan Kejadian Luar Biasa (Klb) Penyakit Hepatitis A Di Pacitan," *Jurnal Bidang Kesejahteraan Sosial*, vol. 1, no. 14, pp. 13-18, 2019.
- [2] F. B. Harisma, F. Syahrul, T. Mubawadi and Y. A. Mirasa, "Analisis Kejadian Luar Biasa Hepatitis A Di Sma X Kabupaten," *Jurnal Berkala Epidemiologi*, vol. 6, no. 2, pp. 112-121, 2018.
- [3] World Health Organization, "Hepatitis A," World Health Organization, 27 Juli 2021. [Online]. Available: <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/hepatitis-a>. [Accessed 16 Oktober 2021].
- [4] N. Nurfitriana, M. Kiftiah and Y. Yudhi, "Analisis Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Hepatitis A Dengan Vaksinasi Dan Sanitasi," *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)*, vol. Volume 08, no. No. 2, pp. 327-334, (2019).
- [5] I. Nurul, F. Putri, W. M. Winahyu and V. B. Kusuma, "Model Matematika Penyebaran Hepatitis A Di Kabupaten Jember," *Jurnal Matematika Ilmiah STIKIP Muhammadiyah Kuningan*, vol. 7, no. 1, pp. 11-11, 2019.

- [6] M. Soleh, R. Munawaroh, W. and Z. , "Kestabilan Model Matematika Penularan Virus Hepatitis B (VHB) Di Bawah Pengaruh Vaksinasi Dan Pengobatan Dengan Adanya Migrasi," in *Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industr*, Pekanbaru, 2019.
- [7] F. Ilahi and N. Fadillaturohmah, "Model Seir Untuk Penyebaran Penyakit Hepatitis C Dengan Pengobatan Pada Populasi Terinfeksi Kronis," *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika*, vol. 5, no. 1, pp. 19-28, 2021.
- [8] E. Pratiwi, T. Soekarso, K. Adam and V. Setiawaty, "Identifikasi Virus Hepatitis A Pada Sindrom Penyakit Kuning Akut Di Beberapa Provinsi Di Indonesia Tahun 2013," *Global Medical and Health Communication*, vol. 5, no. 3, pp. 199-204, 2017.
- [9] S. H. Putri, A. Khadijah, P. Julianty, E. Noor and S. W, "Hubungan Perilaku Cuci Tangan, Pengelolaan Air Minum Dan Rumah Sehat Dengan Kejadian Hepatitis Di Indonesia," *Jurnal Ekologi Kesehatan*, vol. 17, no. 1, pp. 41-51, Juni 2018.
- [10] Kementrian Kesehatan RI, Situasi dan Analisis Hepatitis, Jalarta selatan: Keentrian Kesehatan RI, 2014.
- [11] I. Ananda, S. Syarif and A. N. Nurlina, "Faktor-Faktor yang Berkontribusi Terhadap Kejadian Luar Biasa Hepatitis A," *Jurnal Epidemiologi Kesehatan Indonesia*, vol. Vol. 3, no. No. 2, pp. 71-76, Desember 2019.
- [12] Kementrian Kesehatan Republik Indonesia, "Peraturan Menteri Kesehatan Republik Indonesia Nomor 53 Tahun 2015 tentang Penanggulangan Hepatitis Virus," Kementrian Kesehatan Republik Indonesia, Jakarta, 2015.
- [13] P. van den Driessche and J. Watmough, "Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission," *Math. Biosci.*, vol. 180, no. 1–2, pp. 29–48, Nov. 2002, doi: 10.1016/S0025-5564(02)00108-6.
- [14] R. Resmawan and N. Nurwan, "Konstruksi Bilangan Reproduksi Dasar pada Model Epidemik SEIRS-SEI Penyebaran Malaria dengan Vaksinasi dan Pengobatan," *J. Mat. Integr.*, vol. 13, no. 2, p. 105, Sep. 2017, doi: 10.24198/jmi.v13.n2.12332.105-114.